Zadanie 5

W mieście Ekonomia mieszka dwóch mieszkańców: Ania i Bartek. Miasto postanowiło dostarczyć dobro publiczne G, które byłoby finansowane jedynie z indywidualnych składek mieszkańców. Ania i Bartek mają identyczne funkcje użyteczności: $U(X, G)=2\ln(X) + \ln(G)$, gdzie X to prywatna konsumpcja, a G to dobro publiczne. Całkowita podaż dobra publicznego jest równa sumie liczby jednostek zakupionych przez Anię i Bartka. Każde z nich dysponuje dochodem 200. Jednostkowa cena każdego z dóbr wynosi 1.

a) Ile jednostek G zostanie dostarczone bez interwencji w mechanizm rynkowy?
b) Jaka wielkość G jest optymalna społecznie?
c) Załóżmy, że rząd nie jest zadowolony z równowagi rynkowej i nałożył na mieszkańców miasta podatek ryczałtowy w wysokości 10. Dochody z podatku przeznaczył na zakup dobra publicznego. Czy osiągnięto w ten sposób alokację efektywną w rozumieniu Pareta?
d) Załóżmy, że rząd nadal nie jest zadowolony z osiągniętej alokacji i obciąża teraz Anię podatkiem 50, a Bartka podatkiem 25. Z wpływów podatkowych finansuje zakup G. Ile łącznie jednostek G zostanie zakupione? Ile jednostek G kupi Ania, a ile Bartek? Jak te wielkości mają się do sytuacji w (c)?

Rozwiązanie

Preferencje mieszkańców są opisane za pomocą funkcji Cobb-Douglas'a: $U=X^2G$ => zerowa ilość któregoś z dóbr prowadzi do zerowej użyteczności => mieszkańcy wolą mieć po trochę każdego z dóbr niż dużo jednego & zero drugiego.

a.) $P_X*X_A+P_G*G_A=200$ & $P_X=P_G=1$ => $X_A+ G_A=200$ $\quad$ $G_A+G_B=G$
$P_X*X_B+P_G*G_B=200$ $\quad$ $X_B+ G_B=200$ $\quad$ $G_A=G-G_B$

Ze względu na to, że preferencje i budżet mieszkańców są identyczne, to $G_A=G_B$ oraz $X_A=X_B$

max $U_A=2\ln(X) + \ln(G_A+G_B) = 2\ln(X_A)+\ln(200-X_A+G_A)$ => liczymy pochodną po X_A, gdyż konsumpcja dobra publicznego zależy od wyboru całego społeczeństwa

$2/X_A - 1/(200- X_A +G_A) = 0$
$2/X_A = 1/(200- X_A +G_A)$
$X_A= 400 - 2X_A + 2G_A$
$3X_A= (400 + 2G_A)$
$X_A = (400 + 2G_A)/3$

Wstawiamy wynik do równania budżetowego:
$(400 + 2G_A)/3 + G_A = 200$
$400 + 2G_A + 3G_A = 600$
$5G_A = 200$
$G_A = 40$

Symetryczna analiza będzie dla Bartka => $G_B = 40$
$\mathbf{X_A=}$ $(400+80)/3 =$ **160** => $\mathbf{X_B= 160}$
G= 40 + 40 = **80**, ale pojawia się problem jazdy na gapę (gdyż każdy maksymalizuje własną U)

b.) $X_A=X_B=X$, czyli możemy przyjąć takie oznaczenie
$G_A=G_B$, ale $G_A+G_B=G$ gdyż dla dóbr publicznych liczy się wyłącznie wspólny popyt

wspólne równanie budżetowe: $X_A+ G_A + X_B + G_B = 200+ 200$
$$2X + G = 400$$

max $(U_A+U_B) = 4\ln X + 2\ln(G) = 4\ln X + 2\ln(400 - 2X)$ => czyli brak jazdy na gapę

$4/X - 2*2/(400-2X) = 0$
$2/X - 2/(400-2X) = 0$
$X= 400/3 =$ $\mathbf{X_A = X_B \approx 133}$, czyli spadek konsumpcji prywatnej

Wstawiamy wynik do równania budżetowego:
$\mathbf{G}=400 - 2*400/3 \approx \mathbf{133}$, czyli wzrost konsumpcji publicznej

c.) podatek ryczałtowy => rząd zabiera ustaloną sumę pieniędzy niezależnie od zachowania indywidualnego podmiotu => dochód konsumentów spada o 10

Równania budżetowe z uwzględnieniem podatku: $X_A+G_A=190$ & $X_B+G_B=190$

Rząd przeznacza wpływy podatkowe na zakup dobra publicznego => co najmniej 20 jednostek G zostanie dostarczonych:

max $U_A= 2\ln X_A + \ln(G_A+G_B+20)$

$2/X_A - 1/(210-X_A+G_B) = 0$
$X_A= 420 - 2X_A +2G_B$
$X_A= 420/3 +2G_B/3$ => $X_A+G_A=190$
$(420/3 +2G_B/3) + G_A=190$
$G_A =50 - 2G_B/3$

Symetryczna analiza będzie dla Bartka => $G_B =50 - 2G_A/3 = 50 - 2(50 - 2G_B/3)/3$ => $G_B=30=G_A$

$\mathbf{X_A}= 420/3 + 2*30/3 =\mathbf{160=X_B}$
$\mathbf{G}= G_B+G_A +20 = 30*2+20=\mathbf{80}$ => interwencja rządowa doprowadziła do tego samego rozwiązania jak w (a), gdzie optimum społeczne NIE było osiągnięte. Podatek zredukował dochody konsumentów nie doprowadzając do internalizacji efektów zewnętrznych.

d.) zróżnicowane stawki podatku => brak symetrycznego rozwiązania dla konsumentów:

$X_A + G_A = 200 - 50$ & $X_B + G_B = 200 - 25$

$G_A = 150 - X_A$ & $G_B = 175 - X_B$

Rząd przeznacza wpływy podatkowe na zakup dobra publicznego => co najmniej 75=50+25 jednostek G zostanie dostarczonych:

max $U_A = 2\ln X_A + \ln(G_A+G_B+75) = 2\ln X_A + \ln(150-X_A+G_B+75) = 2\ln X_A + \ln(225+G_B - X_A)$

$2/X_A - 1/(225-X_A+G_B) = 0$

$X_A = 150 + 2G_B/3$ => $X_A + G_A = 150$

$150 + 2G_B/3 + G_A = 150$

$G_A = -2G_B/3$, ale nie można mieć ujemnego udziału => $G_A=0$

$\mathbf{X_A = 150}$

max $U_B = 2\ln X_B + \ln(G_A+G_B+75) = 2\ln X_B + \ln(G_A+175-X_B+75) = 2\ln X_B + \ln(250+G_A-X_B)$

$2/X_B - 1/(250-X_B+G_A) = 0$

$X_B = 500/3 + 2G_A/3$ => $X_B + G_B = 175$

$500/3 + 2G_A/3 + G_B = 175$

$G_B = 25/3 - 2G_A/3 = 25/3$

$\mathbf{X_B} = 175 - 25/3 = \mathbf{166\ 2/3}$

G$= G_B+G_A+75 =$ **83 1/3** => wprowadzenie zróżnicowanego podatku doprowadzi do rezygnacji Ani z udziału w podaży dobra publicznego, ale podaż mimo wszystko wzrośnie w porównaniu z (c). Podobne rozwiązanie można osiągnąć przy jednolitej stawce podatku i zróżnicowanych wyjściowych dochodach konsumentów.